373. 單一連結面分ノ *erreichbar* ナ境界点ノ次元

寺阪英孝（阪大）

S. Mazurkiewicz ノ論文[1]デ、解析函数ノ特異点ガアル *Metrik*（或ハ近傍系）ノ下ニ丁度 2-*dimensional* ニナルカ如何カガ問題トナッテ来マスガ、之レヲ実例ニヨッテ解決シヨウトシマシタラ、具合ノ悪イ集合ガ出テ来テウマク参リマセン。元ノ問題ニハ触レズニ、コノ集合ヲ下デ求メテミマセウ。結果ハ定理ノ形デ述ベレバ

$\boxed{\text{定理}}$ *erreichbar* ナ境界点ノ全体ガ 0-*dimensional* デアルヤウナ單一連結ナ面分ガ存在スル[2]。

コノ例ハ同時ニ次ノ定理ヲ與ヘマス。

---

1) S. Mazurkiewicz: Sur les points singuliers d'une fonction analytique (Fund. Math. XVII, 1931)

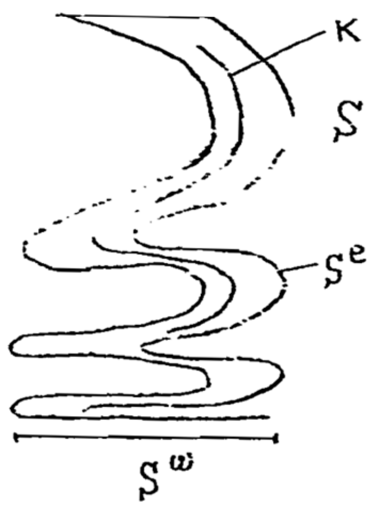
2) 境界ガ一点ノミヨリ成立スル *tribial* ナ場合ヲ除ク。

$\boxed{\text{定理}}$ 集合Mノ任意ノ二点x, yヲ内外ニ分ツイカナルJordan曲線モMト共通点ヲ有スル如キ、0-dimensionalナ集合ガ平面上ニ存在スル。

§1.

$$S^e\begin{cases} x=\sin\frac{1}{y}, & 0<y\leqq\frac{1}{2\pi} \\ x=\sin\frac{1}{y}+a, & 0<y\leqq\frac{1}{2\pi}\ (a>0) \\ 0\leqq x\leqq a, & y=\frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

$$S^\omega:\quad -1\leqq x\leqq 1+a,\quad y=0$$



ナル曲線ヨリ成立スル圖形$S=S^e+S^\omega$ヲS図形トイヒ，Sニ囲マレタ有界領分ヲS°, S°ノ閉包ヲ単ニ$\bar{S}$デ表ハス。S^eハS°ノerreichbarナ境界線，S^ωハnicht erreichbarナ境界線デアル。S°ノ中ニ

$$K:\quad x=\sin\frac{1}{y}+\frac{a}{2}$$

$$0<y\leqq\frac{\theta}{2\pi}\ (0<\theta<1)$$

ナル曲線Kヲ入レルコトヲ、S圖形ニ切目ヲ入レルト云ヒ、KヲSノ切目ト云フ。

平面ノtopologischナ寫像ニヨル㊤コレラト等型ナ圖形ニ同ジ記号、同ジ名稱ヲ用ヒルコトトスル。

§2. 次ニ平行線

$$y=0,\quad y=\frac{1}{2\pi}$$

ノ間ニ

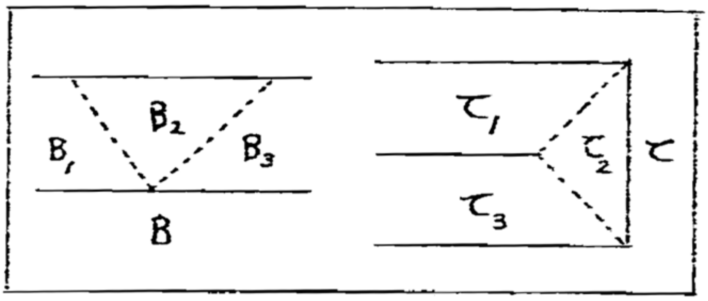
$$s_n:\ x=\sin\frac{1}{y}+\frac{n}{2}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\text{------})$$

ナル曲線ヲ入レ(s_{2n}, s_{2n+1})ト平行線ノ一部トカラナル S
図形ヲ S_n, ソノ切目ヲ k_n トスル。

$y=0$, $y=1$ ナル平行線間ノ面分ヲ B トスレバ

$$B-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{S}_n,\qquad B-\sum_{n=-\infty}^{\infty}k_n$$

ハイヅレモ單一連結デ、$y=0$ ナル直線ハソノ *nicht erreichbar* ノ境界線トナッテヰル。今三本ノ半直線



$$y=\pm\frac{1}{2\pi},\quad x\leqq\frac{1}{2\pi}$$

$$y=0,\quad x\leqq 0$$

ト線分

$$-\frac{1}{2\pi}\leqq y\leqq\frac{1}{2\pi},\quad x=\frac{1}{2\pi}$$

トカラ成ル図形 τ ヲ圖ノヤウニ $\tau_1\tau_2\tau_3$ ノ三部ニ分チ、又 B ヲモ圖ノヤウニ $B_1B_2B_3$ ニ三分シテ $\tau_1\tau_2\tau_3$ ヲ夫々 $B_1B_2B_3$ ニ境界ヲモコメテ *topologisch* ニ對應セシメ、尚 $\tau_1\cdot\tau_2$, $\tau_2\cdot\tau_3$ ナル境界ガ夫々 $B_1\cdot B_2$, $B_2\cdot B_3$ ニ対應スルヤウニシテオケバ、コノ寫像ニヨッテ B 中ノ s_n, k_n ハ τ 中ノ同型ナ圖形 σ_n, κ_n ニ寫像サレル。

コノトキ

$$\tau-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{\sigma}_n,\qquad \tau-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\kappa_n$$

ハ單一連結ノ面分デアッテ τ ノ切目トモイフベキ κ(即チ

$y=0,\ x\leqq 0$ ナル半直線）ハソノ nicht erreichbar ナ境界線デアル。

§3. <u>Sノ細分.</u> S圖形Sト上述ノてトノ間ニtopologisch ナ寫像ヲツクリ、Sノ切目Kガてノ切目 κ ニ對應スルヤウニシ、且ツSノ erreichbar ナ境界線 S^e ガてノ境界ニ対應スルヤウニスレバ、コノ寫像デ σ_n, κ_n ニ對應スルモノヲ S_n, K_n トスルト

$$(1)\qquad S^0-\sum_{-\infty}^{\infty}\bar{S}_n,\quad S^0-\sum_{-\infty}^{\infty}K_n$$

ハイヅレモ單一連結ナ面分デ、Sノ切目Kハコノ双方ノ nicht erreichbar ナ境界線トナリ，

$$(2)\qquad K=\sum S_n^{\omega}$$

トカケル。（ココニ S_n^{ω} ハ §1 ノ意味デ S_n^0 ノ nicht erreichbar ナ境界線、以後同様）

切目ノ入ッテヰルS図形ニ斯様ナ S_n, K_n ヲ入レルコトヲ<u>Sノ細分</u>トイフ。

§4. 以上ヲ元ニシテ求ムル面分Gヲ作圖スル。ソノタメ最初ニ変換 $w=e^{\pi i z}$ ニヨツテz平面上ノ帶形Bヲw平面ノ環形ニ寫像スルト、B内ノ s_n, k_n ハ單位円 $Q: |w|<1$ 内ノS図形トソノ切目トニナル。コレヲ $S_{n_1}, K_{n_1}\ (n_1=1,2)$ トカク。ソウスレバ

$$(3)_1\qquad G_1=Q-\sum_{n_1=1}^{2}\bar{S}_{n_1}$$

(4)$_1$　$Q_1 = Q - \sum K_{n_1}$

ハイヅレモ單一連結ナ面分デQノ境界 $B(Q)$ ハ双方ノ nicht erreichbar ナ境界線トナリ、次式ガ成立スル。

(5)$_1$　$B(Q) = \overline{Q} - Q = G_1^{\omega} = Q_1^{\omega} = \sum S_{n_1}^{\omega}$

次ニ S_{n_1} ヲ§3ノ方法ニ従ッテ細分シ、得ラレタS圖形、切目ヲ $S_{n_1 n_2}$, $K_{n_1 n_2}$ $(n_2 = 0, \pm 1, \pm 2)$ デ表ハス。同様ニシテ一般ニ $S_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_{\nu-1}}$ カラ $S_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1} n_\nu}$, $K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1} n_\nu}$ 等ヲ求メ、次ノヤウニオク。

(3)$_\nu$　$G_\nu = Q_{\nu-1} - \sum\limits_{(n_1, \cdots n_\nu)} \overline{S}_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu}$　$\left(\begin{array}{l}\sum \text{ハスベテノ } n_1, n_2, \\ \cdots\cdots n_\nu \text{ ニツイテノ和}\end{array}\right)$

(4)$_\nu$　$Q_\nu = Q_{\nu-1} - \sum\limits_{(n_1, \cdots n_\nu)} K_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu}$

但シコノ際

(6)　$\delta(S_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu}) < \frac{1}{2^\nu}$

ノヤウニシテ置ク。（$\delta(M)$ ハ M ノ直径）、細分ノ性質カラ

(7)　$K_{n_1 \cdots\cdots n_\nu} \subset \overset{\circ}{S}_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1} n_\nu} \subset \overset{\circ}{S}_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}}$

(5)$_\nu$　$K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}} = \sum S^{\omega}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$

§3. (1) ニ對スル K ノ性質カラ $K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}}$ ハ $\overset{\circ}{S}_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}} - \sum\limits_{n} \overline{S}_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1} n}$ ノ nicht erreichbar ナ境界線、ヨッテ又 G_ν 及ビ Q_ν ノ nicht erreichbar ナ境界線デモアル。

即チ

(8) $x \subset K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}} \longrightarrow x \subset G_\nu^\omega,\ x \subset Q_\nu^\omega$

次ニ $G_{\nu+1} = Q_\nu - \sum \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu n_{\nu+1}}$

$(4)_\nu$ ニヨリ

$$= (Q_{\nu-1} - \sum K_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}) - \sum \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu n_{\nu+1}}$$

(7) ニヨリ

$$\supset (Q_{\nu-1} - \sum K_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}) - \sum \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$$

同ジク (7) ニヨリ

$$= Q_{\nu-1} - \sum \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$$

$$= G_\nu$$

ヨッテ

$$G_{\nu-1} \subset G_\nu$$

今 $$G = \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$$

トオケバ

$$G_\nu \subset G$$

又 $(3)_\nu$, $(4)_\nu$ ヨリ

$$G_\nu \subset Q_{\nu-1}$$

$$Q_\nu \subset Q_{\nu-1}$$

ヨッテ $m, n \geqq 1$ ニ對シ

$$G_m \subset Q_n$$

故ニ又 $G \subset Q_\nu$

§5. $x \subset S^\omega_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$ ナル任意ノ一点ヲ x ヲトルト

$(5)_\nu$ ニヨリ

$$x \subset K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}} \quad (\nu = 1 \text{ ナラバ } x \subset B(Q))$$

故ニ (8) 及ビ (5)ₙ カラ $x \subset Q_\nu^\omega$ 及ビ $x \subset G_\nu^\omega$

然ルニ $G_\nu \subset G \subset Q_\nu$ ナル故

$$x \subset G^\omega$$

即チ

(9) $x \subset S^\omega_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$ ナル点ハ G ノ nicht erreichbar ノ境界点デアル。 $(\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$

次ニ x ヲ

$$x \subset \bar{Q} - G$$

トスレバ

$$\begin{aligned} x \subset \bar{Q} - G = \bar{Q} - \sum G_\nu &\subset \bar{Q} - G_\nu \\ &= \bar{Q} - (Q_{\nu-1} - \sum \bar{S}_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu}) \\ &\subset \bar{Q} - Q_{\nu-1} + \sum \bar{S}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu} \end{aligned}$$

然ルニ $(4)_\nu$, (5), $(5)_\nu$ ヨリ

$$\begin{aligned} \bar{Q} - Q_{\nu-1} &= (\bar{Q} - Q) + (Q - Q_{\nu-1}) \\ &= \sum S^\omega_{n_1} + \sum K_{n_1} + \sum K_{n_1 n_2} + \cdots\cdots + \sum K_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu-1}} \\ &= \sum S^\omega_{n_1} + \sum S^\omega_{n_1 n_2} + \cdots\cdots + \sum S^\omega_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu} \end{aligned}$$

依ッテ上式カラ x ハアル λ ニツキ

$$x \subset S^\omega_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\lambda}$$

トナルカ、然ラザレバ $x \subset S^e_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$ 或ハ $x \subset S^0_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$

モシ $x \subset S^e_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$ ダトスレバ $S^e_{n_1 \cdots\cdots n_\nu} \subset G_{\nu+1} \subset G$

トナルカラ、矛盾スル。ヨッテ

(10) $x \subset S^0_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$

デナケレバナラヌ。νハ任意デアルカラ、若シスベテノ n_1 ---- ---- n_ν, ν ニ對シテ $x \not\subset S^{\omega}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$ ナラバ、アラエル ν ニ對シテ (10) ガ成立スル如キ $n_1 \cdots\cdots n_\nu$ ガナケレバナラヌ。然ルニ

$$S^{o}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu} \cdot S^{o}_{m_1 \cdots\cdots m_\nu \cdots\cdots m_\lambda} \neq 0 \quad (\lambda \geqq \nu)$$

ガ成立スルノハ $n_1 = m_1, \cdots\cdots, n_\nu = m_\nu$ ノ時ニカギルカラ唯一ツ数列 $n_1, n_2, \cdots\cdots n_\nu$ ニ對シテ

$$x \subset S^{o}_{n_1} \qquad x \subset S^{o}_{n_1 n_2} \qquad x \subset S^{o}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu} \cdots\cdots$$

(6) カラ　$\delta(S^{o}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}) \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)$ ナル故

$$(11) \quad x = \prod_{\nu=1}^{\infty} S^{o}_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_\nu}$$

斯ノヤウナ x ハ G ノ erreichbar ナ境界点デアル。

何者、$a_\nu \subset S^{o}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$ ナル a_ν 点ヲトリ出シ, 両端ガ a_ν, $a_{\nu+1}$ ナル Jordanbogen b_ν デ (両端ヲ除キ) $\subset S^{o}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu} - \sum \overline{S}_{n_1 \cdots\cdots n_{\nu+1}}$ ナルモノヲ考ヘレバ, $\sum b_\nu$ ハ $\rightarrow x$ ナル G 内ノ連続曲線ダカラデアル。

§6. §5 ニヨリ $\overline{Q} - G$ ノ点ハ G ノ nicht erreichbar ナ境界点デアルカ又ハ (11) デ表ハサレル G ノ erreichbar ナ点カデアルコトガ判ッタ。$\overline{G} - G \subset \overline{Q} - G$ ダカラ従ッテ G ノ境界点ハ上述ノモノデ盡キル。今

$$(12) \quad \sum_{(n_1 \cdots\cdots n_\nu \cdots)} \prod_{\nu=1}^{\infty} S^{o}_{n_1 \cdots\cdots n_\nu}$$

ナル集合ヲ考ヘルト, コレハ G ノ境界ニ属スルカラ (12) ハ G

ノ erreichbar ナ境界点ノ全体ト一致スルコトニナル。コノ集合ハ明カニ 0-dimensional ナル故，G ガ求ムル面分デアル。